Kanoniczne równania Hamiltona i wielkości zachowane (całki) ruchu

Artykuł podąża tropem rozdziału I książki Quantum Field Theory (C. Itzykson, J.-B. Zuber).

Autor: Marek Pietrachowicz.

Poznajmy kilka istotnych konsekwencji, wypływających wprost z równania definiującego Hamiltonian (równanie to nosi także miano transformacji Legendre'a). Ma ono postać

$$H(p,q) \;:=\; \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - L(q,\dot{q}) \;\equiv\; \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i(p,q) - L(q,\dot{q}(p,q))$$

(znak sumy, zgodnie z konwencją sumacyjną, będziemy dalej opuszczać). Jakkolwiek Lagrangian, równy różnicy energii kinetycznej i potencjału, $L \equiv T - V$, jest definiowany jako funkcja niezależnych od siebie zmiennych $(q,\dot{q})$, to Hamiltonian wymaga wyłuskania z prędkości $\dot{q}$ zależności od nowych zmiennych niezależnych (p,q) . Za chwilę ujrzymy, co dla układu fizycznego oznacza, jeśli jakobian tego przejścia (zamiany zmiennych) znika.

Rozpiszmy teraz wyrażenie na różniczkę zupełną Hamiltonianu:

$$\begin{aligned} dH \;=\; dp_i\dot{q}_i \;+\; p_i d\dot{q}_i \;-\; dL \;=\; dp_i\dot{q}_i \;+\; p_i\left(\frac{\partial\dot{q}_j}{\partial q_i}dq_j \;+\; \frac{\partial\dot{q}_i}{\partial p_j}dp_j\right) \;-\; \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i \;+\; \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}d\dot{q}_i\right) \;= \\ dp_i\dot{q}_i \;+\; \left(p_j \;-\; \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\right)\left(\frac{\partial\dot{q}_j}{\partial q_i}dq_i \;+\; \frac{\partial\dot{q}_j}{\partial p_i}dp_i\right) \;-\; \frac{\partial L}{d q_i}dq_i \;= \\ dp_i\left[\dot{q}_i \;+\; \left(p_j \;-\; \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\right)\frac{\partial\dot{q}_j}{\partial p_i}\right] \;+\; dq_i\left[\left(p_j \;-\; \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\right)\frac{\partial\dot{q}_j}{\partial q_i} \;-\; \frac{\partial L}{\partial q_i}\right] \;. \end{aligned}$$

Wyrażenia w nawiasach okrągłych znikają z uwagi na samą definicję pędów uogólnionych $p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}$ i w rezultacie otrzymujemy

$$dH \;=\; dp_i\dot{q}_i \;-\; dq_i\frac{\partial L}{\partial q_i} \;\;.$$

Ale wyraz kinetyczny w Lagrangianie nie zależy od położeń, zatem $\frac{\partial L}{\partial q_i} \;=\; -\;\frac{\partial V}{\partial q_i} \;\equiv\; \dot{p}_i$, bo siła jest minus gradientem potencjału. Mamy zatem

$$dH \;=\; dp_i \dot{q}_i \;-\; dq_i \dot{p}_i \quad ,$$

skąd natychmiast widać, że $\dot{q}_i \;=\; \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i \;=\; -\;\frac{\partial H}{\partial q_i}$, co stanowi treść **kanonicznych równań Hamiltona.**

Wypiszmy teraz ogólne wyrażenie na zmienność czasową dowolnej funkcji *f* opisanej w przestrzeni fazowej *n* pędów uogólnionych i *n* położeń uogólnionych (p, q) :

$$\frac{df}{dt} \;=\; \frac{\partial f}{\partial t} \;+\; \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i \;+\; \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

(nadal pomijamy znaki sumy). Ale z uwagi na wyprowadzone dopiero co równania kanoniczne Hamiltona, to wyrażenie jest równe

$$\frac{df}{dt} \;=\; \frac{\partial f}{\partial t} \;-\; \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \;+\; \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} \quad .$$

Wprowadzając **nawias Poissona**

$$\{a, b\} \;:=\; \frac{\partial a}{\partial q_i}\frac{\partial b}{\partial p_i} \;-\; \frac{\partial a}{\partial p_i}\frac{\partial b}{\partial q_i} \quad ,$$

możemy przepisać nasze wyrażenie w prostej postaci jako

$$\frac{df}{dt} \;=\; \frac{\partial f}{\partial t} \;+\; \{f, H\} \quad .$$

Jeśli dana wielkość *f* nie zależy explicité od czasu, tzn. $\frac{\partial f}{\partial t}=0$, to warunkiem na jej stacjonarność, czyli na to, żeby była wielkością zachowaną w ruchu (całką ruchu), jest znikanie jej nawiasu Poissona z Hamiltonianem:

$$f = Const \;\;\Leftrightarrow\;\; \{f, H\} = 0 \quad .$$

Każda wielkość nie będąca wprost zależna od czasu, która jest wielkością zachowaną, musi spełniać powyższy warunek i wystarczy, żeby go spełniała, aby być zachowana.

Proszę porównać ten warunek z analogicznym do niego i korespondującym z nim warunkiem na znikanie komutatora danej obserwabli z Hamiltonianem, $[\hat{A},\hat{H}]=0$, w mechanice kwantowej w obrazie Schrödingera (por. artykuł „Symetrie” w Banku Pomysłów na stronie http://strefa-zrozumienia.pl).